

Sujet + Corrigé

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC ES
PRIMITIVES, INTÉGRALES - 2016

SUJET 6
POLYNÉSIE
BAC ES - 2016

**CORRECTION RÉALISÉE
PAR ALAIN PILLER**



Annales Mathématiques Bac 2016
Sujets + Corrigés - Alain Pillier
Polynésie

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES - Série ES

Durée de l'épreuve : 3 heures Coefficient : 5

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

**Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 7 pages
numérotées de 1/7 à 7/7.**

EXERCICE 1 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

On s'intéresse à l'ensemble des demandes de prêts immobiliers auprès de trois grandes banques. Une étude montre que 42 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Karl, 35 % des demandes de prêts sont déposées auprès de la banque Lofa, alors que cette proportion est de 23 % pour la banque Miro.

Par ailleurs

- 76 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Karl sont acceptées ;
- 65 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Lofa sont acceptées ;
- 82 % des demandes de prêts déposées auprès de la banque Miro sont acceptées.

On choisit au hasard une demande de prêt immobilier parmi celles déposées auprès des trois banques.

On considère les évènements suivants :

- K : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Karl » ;
- L : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Lofa » ;
- M : « la demande de prêt a été déposée auprès de la banque Miro » ;
- A : « la demande de prêt est acceptée ».

On rappelle que pour tout évènement E , on note $P(E)$ sa probabilité et on désigne par \bar{E} son évènement contraire.

Dans tout l'exercice on donnera, si nécessaire, des valeurs approchées au millième des résultats.

Partie A

1. Construire un arbre pondéré illustrant la situation.
2. Calculer la probabilité que la demande de prêt soit déposée auprès de la banque Karl et soit acceptée.
3. Montrer que $P(A) \approx 0,735$.
4. La demande de prêt est acceptée. Calculer la probabilité qu'elle ait été déposée à la banque Miro.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse à la durée moyenne d'un prêt immobilier.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque prêt immobilier, associe sa durée, en années.

On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 20$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

1. Calculer la probabilité que la durée d'un prêt soit comprise entre 13 et 27 ans.
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près du nombre réel a tel que $P(X > a) = 0,1$.

Interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.

EXERCICE 2 (7 points)

Une entreprise s'intéresse au nombre d'écrans 3D qu'elle a vendus depuis 2010 :

Année	2010	2011	2012
Nombre d'écrans 3D vendus	0	5 000	11 000

Le nombre d'écrans 3D vendus par l'entreprise l'année $(2010 + n)$ est modélisé par une suite (u_n) , arithmético-géométrique, de premier terme $u_0 = 0$.

On rappelle qu'une suite arithmético-géométrique vérifie, pour tout entier naturel n , une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a \times u_n + b$ où a et b sont deux réels.

- (a) En supposant que $u_1 = 5\,000$, déterminer la valeur de b .

(b) En supposant de plus que $u_2 = 11\,000$, montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$u_{n+1} = 1,2 \times u_n + 5\,000.$$

- (a) Calculer u_3 et u_4 .

(b) En 2013 et 2014, l'entreprise a vendu respectivement 18 000 et 27 000 écrans 3D.
La modélisation semble-t-elle pertinente ?

Dans toute la suite, on fait l'hypothèse que le modèle est une bonne estimation du nombre d'écrans 3D que l'entreprise va vendre jusqu'en 2022.

- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_n + 25\,000.$$

- (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,2.
Préciser la valeur de son premier terme v_0 .

(b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 25\,000 \times 1,2^n - 25\,000$.

4. On souhaite connaître la première année pour laquelle le nombre de ventes d'écrans 3D dépassera 180 000 unités.

(a) Prouver que résoudre l'inéquation $u_n > 180\,000$ revient à résoudre l'inéquation $1,2^n > 8,2$.

(b) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il détermine et affiche le plus petit entier naturel n , solution de l'inéquation $1,2^n > 8,2$.

Variables :	N est un entier naturel W est un nombre réel
Initialisation :	N prend la valeur 0 W prend la valeur ...
Traitement :	Tant que W prend la valeur $W \times 1,2$ Fin du Tant que
Sortie :	Afficher ...

(c) Déterminer cet entier naturel n .

5. À partir de 2023, l'entreprise prévoit une baisse de 15 % par an du nombre de ses ventes d'écrans 3D. Combien d'écrans 3D peut-elle prévoir de vendre en 2025 ?

EXERCICE 3 (5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

On rappelle que \mathbf{R} désigne l'ensemble des nombres réels.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln x - x + 1$.

Affirmation A : La fonction f est croissante sur l'intervalle $]0; 1[$.

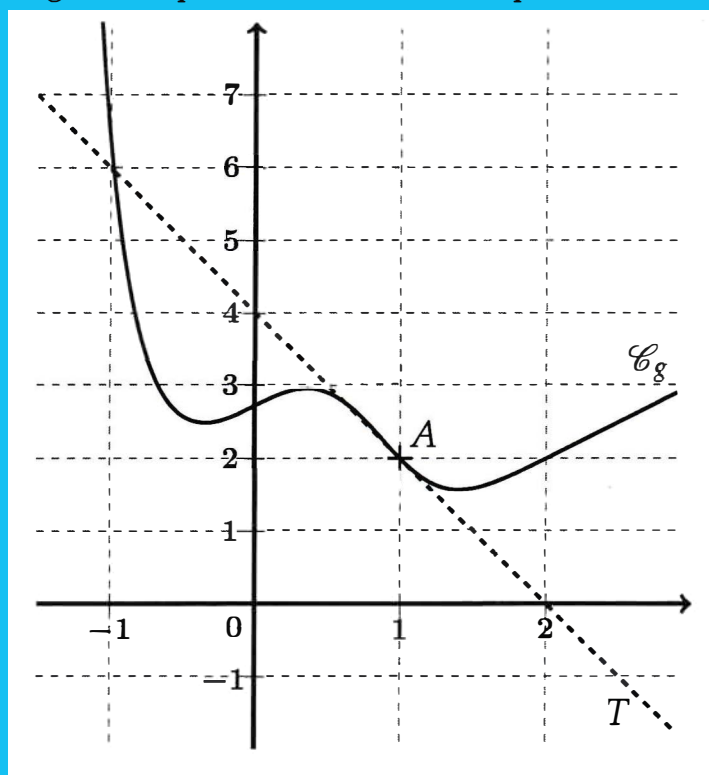
Affirmation B : La fonction f est convexe sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Affirmation C : Pour tout x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, $f(x) \leq 50$.

2. On donne ci-dessous la courbe représentative \mathcal{C}_g d'une fonction g définie sur \mathbf{R} .

On admet que g est dérivable sur \mathbf{R} et on rappelle que g' désigne la fonction dérivée de la fonction g .

On a tracé en pointillé la tangente T à la courbe \mathcal{C}_g au point A de cette courbe, d'abscisse 1 et d'ordonnée 2. Cette tangente coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.



Affirmation D : $g'(1) = -2$.

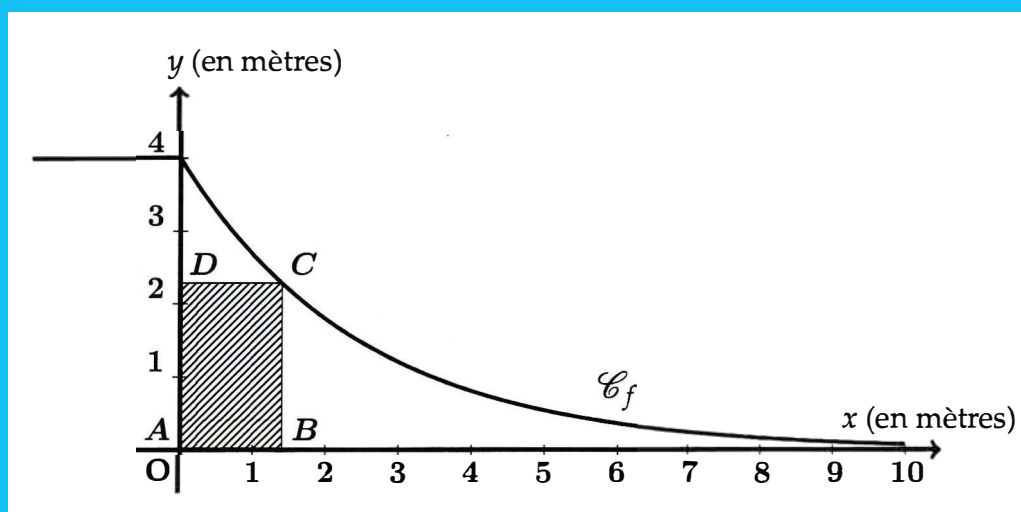
Affirmation E : $\int_0^1 g(x) dx < 3$.

EXERCICE 4 (3 points)

Un publicitaire envisage la pose d'un panneau rectangulaire sous une partie de rampe de skateboard. Le profil de cette rampe est modélisé par la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$f(x) = 4e^{-0,4x}.$$

Cette courbe \mathcal{C}_f est tracée ci-dessous dans un repère d'origine O :



Le rectangle $ABCD$ représente le panneau publicitaire et répond aux contraintes suivantes : le point A est situé à l'origine du repère, le point B est sur l'axe des abscisses, le point D est sur l'axe des ordonnées et le point C est sur la courbe \mathcal{C}_f .

- On suppose dans cette question que le point B a pour abscisse $x = 2$.
Montrer qu'une valeur approchée de l'aire du panneau publicitaire est $3,6 \text{ m}^2$.
- Parmi tous les panneaux publicitaires qui répondent aux contraintes de l'énoncé, quelles sont les dimensions de celui dont l'aire est la plus grande possible ?
On donnera les dimensions d'un tel panneau au centimètre près.

EXERCICE 3

[Polynésie 2016]

1. Affirmation A: " La fonction f est croissante sur $]0;1[$ ".

L'affirmation A est fausse.

Justifions le.

Pour savoir si f est croissante sur $]0;1[$, nous devons montrer que:

$$\text{pour tout } x \in]0;1[, f'(x) \geq 0.$$

Ici: • $f(x) = x \ln x - x + 1$

• $Df =]0;+\infty[$.

Posons: $f = f_1 \times f_2 + f_3$, avec: $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \ln x$ et $f_3(x) = -x + 1$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur \mathbb{R} comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $]0;1[$.

f_2 est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme fonction "ln", donc dérivable sur $]0;1[$.

Par conséquent, $f_1 \times f_2$ est dérivable sur $]0;1[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $]0;1[$.

Et, f est dérivable sur $]0;1[$ comme somme $(f_1 \times f_2 + f_3)$ de 2 fonctions dérivables sur $]0;1[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $x \in]0;1[$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } x \in]0;1[: \quad f'(x) &= \ln(x) + 1 - 1 \\ &\Rightarrow f'(x) = \ln(x). \end{aligned}$$

Or sur $]0;1[$, $f'(x) = \ln(x) < 0$.

Au total, la fonction f est: strictement décroissante sur $]0;1[$.

Affirmation B: " La fonction f est convexe sur $]0;+\infty[$ ".

L'affirmation B est vraie.

Justifions le.

f est convexe sur $]0;+\infty[$ ssi: pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) \geq 0$.

$$\text{Ici, pour tout } x \in]0;+\infty[: \quad f''(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

Au total, la fonction f est convexe et est même strictement convexe sur $]0;+\infty[$.

Affirmation C: " Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) \leq 50$ ".

L'affirmation C est fausse.

Justifions le.

Pour le montrer, il suffit de prendre un contre-exemple.

Prenons $x = 7000$: $f(7000) = 7000 \ln(7000) - 6999$
 $\Rightarrow f(7000) \approx 54976,66 > 50.$

Au total, l'affirmation C est fausse.

2. Affirmation D: " $g'(1) = -2$ ".

L'affirmation D est vraie.

Justifions le.

D'après l'énoncé, g est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

La tangente à la courbe (C) au point $A(1;2)$ passe par le point $A'(2;0)$.

Soit " a " le coefficient directeur de cette tangente. " a " est tel que:

$$a = \frac{y_{A'} - y_A}{x_{A'} - x_A} \Rightarrow a = -2.$$

Au total: $g'(1) = a = -2$.

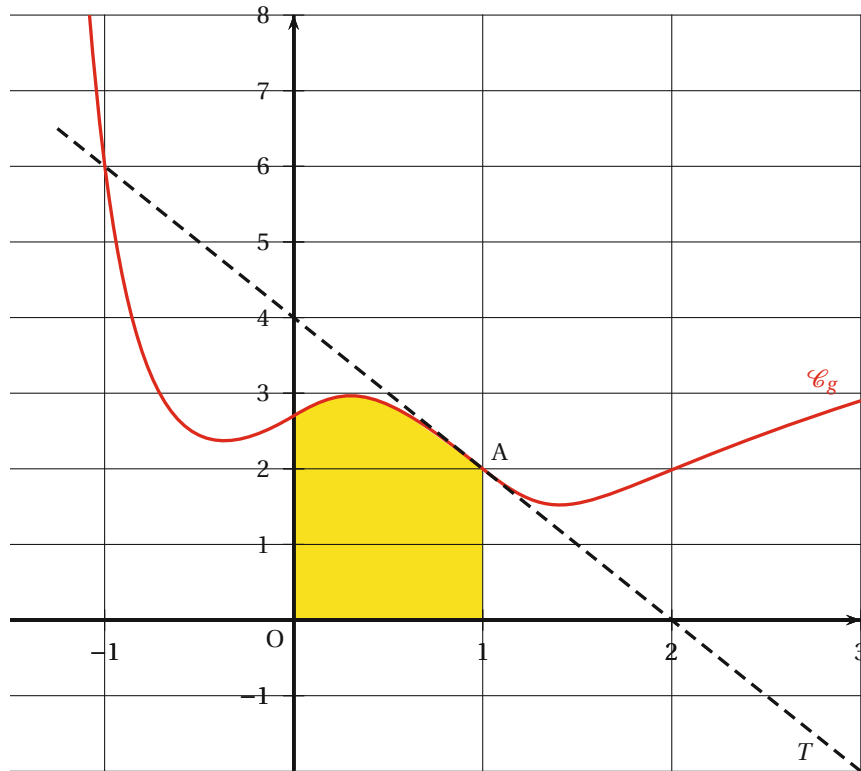
Affirmation E: " $\int_0^1 g(x) dx < 3$ ".

L'affirmation E est vraie.

Justifions le.

En unités d'aire et à l'unité près, l'aire \mathcal{A} du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, est telle que: $\mathcal{A} < 3$ (un peu plus de 2 carreaux, en comptant).

Nous pouvons représenter cette aire \mathcal{A} , en jaune, sur le graphique suivant:



Au total: $\int_0^1 g(x) dx \in [2; 3[$.

EXERCICE 4

[Polynésie 2016]

1. Montrons que l'aire du panneau publicitaire est $3,6 \text{ m}^2$, en supposant $x_B = 2$:

Nous sommes en présence d'un rectangle avec:

$$A(0;0), B(2;0), C(2;f(2)) \text{ et } D(0;f(2))$$

$$\text{cad: } A(0;0), B(2;0), C(2;4e^{-0,8}) \text{ et } D(0;4e^{-0,8}).$$

Dans ces conditions, l'aire \mathcal{A} du panneau publicitaire est:

$$\text{Longueur} \times \text{Largeur} = 4e^{-0,8} \times 2 \Rightarrow \mathcal{A} = 8e^{-0,8}.$$

Au total, l'aire du panneau publicitaire est: $\mathcal{A} = 8e^{-0,8} \text{ m}^2$ ou $\mathcal{A} = 3,6 \text{ m}^2$.

2. Déterminons les dimensions du panneau dont l'aire est la plus grande possible:

D'une manière générale, si B a pour abscisse $x_B = a$, l'aire \mathcal{A} du panneau publicitaire est: $\mathcal{A} = \text{Longueur} \times \text{Largeur}$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = 4e^{-0,4a} \times a$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = 4ae^{-0,4a}.$$

Nous devons à présent calculer la valeur de " a " telle que: $\mathcal{A}'(a) = 0$.

$$\mathcal{A}'(a) = 0 \text{ ssi: } a = 2,5 \text{ mètres.}$$

Ainsi, les dimensions du panneau dont l'aire est la plus grande possible sont:

$$\text{Longueur} = \frac{4}{e} \text{ mètres et Largeur} = 2,5 \text{ mètres.}$$

Dans ces conditions: $\mathcal{A} \text{ max} \approx 3,68$.