Sujet + Corrigé

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC ES

PRIMITIVES, INTÉGRALES - 2016

SUJET 4
CENTRES ÉTRANGERS
BAC ES - 2016

Correction Réalisée Par Alain PILLER

alainpiller.fr

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2016

MATHÉMATIQUES
-Série ES-

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE
Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 5

MATHÉMATIQUES
-Série L-

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ
Durée de l'épreuve : 3 heures - Coefficient : 4

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

16MAELG11

Sujet Mathématiques Bac 2016
Intégrales ES - corrigé

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

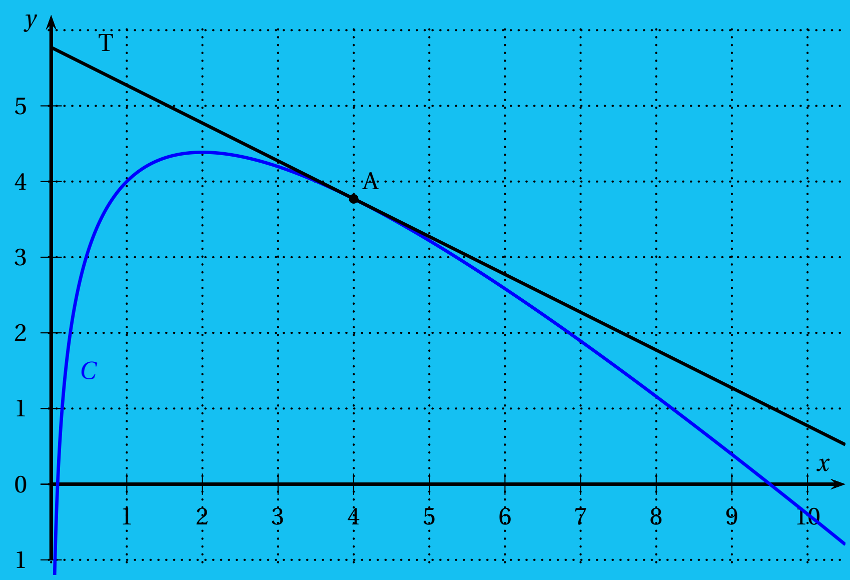
Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une bonne réponse rapporte un point, Une mauvaise réponse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la réponse correspondante

Soit la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par

$$f(x) = 5 - x + 2\ln x.$$

On a représenté ci-dessous la courbe représentative C de la fonction f, ainsi que T, la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 4.



1. On note f' la fonction dérivée de f, on a :

a. $f'(x) = -1 + 2x$

b. $f'(x) = -2\ln x + (5 - x)\dfrac{2}{x}$

c. $f'(x) = \dfrac{-x+2}{x}$

d. $f'(x) = 4 + \dfrac{2}{x}$.

2. Sur l'intervalle $]0\,;\,10]$, l'équation $f'(x) = 0$ admet :

a. Aucune solution

b. Une seule solution

c. Deux solutions

d. Plus de deux solutions

3. Une équation de T est :

a. $y = \dfrac{1}{2}x + 5{,}7$

b. $y = 5{,}7x - \dfrac{1}{2}$

c. $y = -\dfrac{1}{2}x + 1 + 2\ln 4$

d. $y = -\dfrac{1}{2}x + 3 + 2\ln 4$

4. La valeur de l'intégrale $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x$ appartient à l'intervalle :

a. $[1\,;3]$ **b.** $[4\,;5]$ **c.** $[8\,;9]$ **d.** $[10\,;15]$

Exercice 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Un fabricant produit des pneus de deux catégories, la catégorie « pneu neige » et la catégorie « pneu classique ». Sur chacun d'eux, on effectue des tests de qualité pour améliorer la sécurité.
On dispose des informations suivantes sur le stock de production :

— le stock contient 40 % de pneus neige ;
— parmi les pneus neige, 92 % ont réussi les tests de qualité ;
— parmi les pneus classiques, 96 % ont réussi les tests de qualité.

Un client choisit un pneu au hasard dans le stock de production. On note :

— N l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu neige » ;
— C l'évènement : « Le pneu choisi est un pneu classique » ;
— Q l'évènement : « Le pneu choisi a réussi les tests de qualité ».

Rappel des notations :
Si A et B sont deux évènements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé. On notera aussi $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.

Les parties A, B et C peuvent être traitées de manière indépendante.

Dans tout cet exercice, les résultats seront arrondis au millième.

Partie A

1. Illustrer la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité de l'évènement $N \cap Q$ et interpréter ce résultat par une phrase.
3. Montrer que $p(Q) = 0{,}944$.
4. Sachant que le pneu choisi a réussi les tests de qualité, quelle est la probabilité que ce pneu soit un pneu neige ?

Partie B

On appelle durée de vie d'un pneu la distance parcourue avant d'atteindre le témoin d'usure.
On note X la variable aléatoire qui associe à chaque pneu classique sa durée de vie, exprimée en milliers de kilomètres. On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 30$ et d'écart-type $\sigma = 8$.

1. Quelle est la probabilité qu'un pneu classique ait une durée de vie inférieure à 25 milliers de kilomètres ?
2. Déterminer la valeur du nombre d pour que, en probabilité, 20 % des pneus classiques aient une durée de vie supérieure à d kilomètres.

Partie C

Une enquête de satisfaction effectuée l'an dernier a révélé que 85 % des clients étaient satisfaits de la tenue de route des pneus du fabricant. Ce dernier souhaite vérifier si le niveau de satisfaction a été le même cette année.
Pour cela, il décide d'interroger un échantillon de 900 clients afin de conclure sur l'hypothèse d'un niveau de satisfaction maintenu.
Parmi les 900 clients interrogés, 735 sont satisfaits de la tenue de route.

Quelle va être la conclusion du directeur avec un niveau de confiance 0,95 ? Détailler les calculs, la démarche et l'argumentation.

EXERCICE 3 **5 points**

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Un site internet propose à ses abonnés des films à télécharger.
Lors de son ouverture, 500 films sont proposés et chaque mois, le nombre de films proposés aux abonnés augmente de 6 %.

Partie A

On modélise le nombre de films proposés par une suite géométrique (u_n) où n désigne le nombre de mois depuis l'ouverture du site. On a donc $u_0 = 500$.

1. Calculer u_1 et u_2 et donner le résultat arrondi à l'unité.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie B

Dans cette partie, on souhaite déterminer à partir de combien de mois le site aura doublé le nombre de films proposés par rapport au nombre de films proposés à l'ouverture.

1. On veut déterminer cette valeur à l'aide d'un algorithme.
   Recopier et compléter les lignes L3, L5 et L7 pour que l'algorithme donne le résultat attendu.

L1 :	**Initialisation**	Affecter à U la valeur 500
L2 :		Affecter à N la valeur 0
L3 :	**Traitement**	Tant que U ……
L4 :		Affecter à N la valeur $N+1$
L5 :		Affecter à U la valeur ……
L6 :		Fin Tant que
L7 :	**Sortie**	Afficher ……

2. On veut maintenant utiliser une méthode algébrique Calculer le nombre de mois recherché.

Partie C

En raison d'une offre de bienvenue, le nombre d'abonnés au lancement est 15 000. Sur la base des premiers mois, on estime que le nombre des clients abonnés au site évolue suivant la règle suivante :
chaque mois, 10 % des clients se désabonnent et 2 500 nouveaux abonnés sont enregistrés.
On note v_n l'estimation du nombre d'abonnés n mois après l'ouverture, on a ainsi $v_0 = 15000$.

1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a $v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 2500$.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - 25000$.
   a. Montrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,9 et préciser son premier terme.
   b. En déduire que, pour tout entier n, $v_n = 25000 - 10000 \times 0,9^n$.
   c. Peut-on prévoir, à l'aide de ce modèle, une stabilisation du nombre d'abonnés sur le long terme ? Justifier la réponse.

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;8]$ par

$$f(x) = \frac{0,4}{20\mathrm{e}^{-x}+1} + 0,4.$$

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{8\mathrm{e}^{-x}}{(20\mathrm{e}^{-x}+1)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

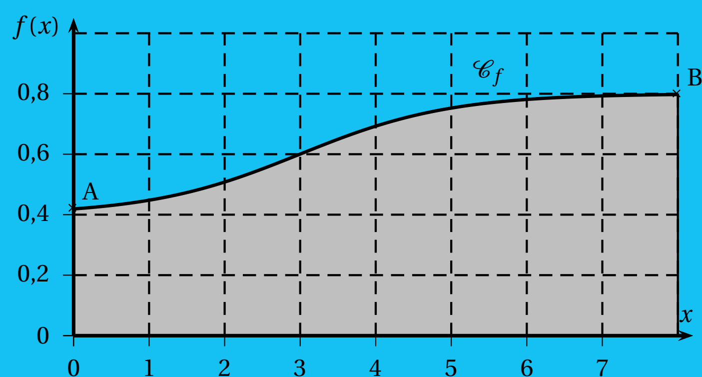
1	$f'(x) := 8 * \mathrm{e}\hat{}(-x) / (20 * \mathrm{e}\hat{}(-x)+1)^2$ $\to f'(x) : \dfrac{8\cdot \mathrm{e}^{-x}}{400\,(\mathrm{e}^{-x})^2 + 40\mathrm{e}^{-x}+1}$
2	$g(x) :=$ Dérivée $[f'(x)]$ $\to g(x) := \dfrac{160\,(\mathrm{e}^{-x})^2 - 8\mathrm{e}^{-x}}{8000\,(\mathrm{e}^{-x})^3 + 1200\,(\mathrm{e}^{-x})^2 + 60\mathrm{e}^{-x}+1}$
3	Factoriser $[g(x)]$ $\to 8\mathrm{e}^{-x} \cdot \dfrac{20\mathrm{e}^{-x}-1}{(20\mathrm{e}^{-x}+1)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Partie B

Dans une région montagneuse, une entreprise étudie un projet de route reliant les villages A et B situés à deux altitudes différentes. La fonction f, définie dans la partie A, modélise le profil de ce projet routier. La variable x représente la distance horizontale, en kilomètres, depuis le village A et $f(x)$ représente l'altitude associée, en kilomètres.

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



Dans cet exercice, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point M est appelé « pente en M ».
On précise aussi qu'une pente en M de 5 % correspond à un coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en M égal à 0,05.
Il est décidé que le projet sera accepté à condition qu'en aucun point de $\mathscr{C}_f$ la pente ne dépasse 12 %.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Proposition 1
L'altitude du village B est 0,6 km.
Proposition 2

L ’écart d’altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre.
Proposition 3
La pente en A vaut environ 1,8 %.
Proposition 4
Le projet de route ne sera pas accepté.

EXERCICE 1

[Centres Étrangers 2016]

1. c. est la bonne réponse, avec c.: " $f'(x) = \frac{-x+2}{x}$ ".

- $f(x) = 5 - x + 2\ln x$
- $f'(x) = -1 + \frac{2}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-x+2}{x}$.

2. b. est la bonne réponse, avec b.: " Une seule solution ".

$f'(x) = 0 \iff \frac{-x+2}{x} = 0 \iff -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$.

$(x \neq 0)$

3. d. est la bonne réponse, avec d.: " $y = -\frac{1}{2}x + 3 + 2\ln 4$ ".

- Soit $y = a.x + b$ (1), l'équation de cette tangente.
- Nous savons que: $f'(x) = \frac{-x+2}{x}$.
- De plus, la tangente T passe par le point A $(4 ; f(4))$.
- D'où:
  - $f'(x_A) = f'(4) \iff f'(x_A) = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$.
  - (1) $\iff f(x_A) = -\frac{1}{2} \times x_A + b$

    $\iff y_A = -\frac{1}{2} \times x_A + b$

    $\iff 1 + 2\ln 4 = -\frac{1}{2} \times 4 + b$

    $\Rightarrow b = 3 + 2\ln 4$.

- En conclusion: $y = -\frac{1}{2}x + 3 + 2\ln 4$.

4. c. est la bonne réponse, avec c.: " $[8;9]$ ".

Graphiquement, en unités d'aire et à l'unité près, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$, est telle que: $8 < \mathcal{A} < 9$.

(un peu plus de 8 carreaux, en comptant).

EXERCICE 4

[Centres Étrangers 2016]

Partie A:

1. Montrons que $f'(x) = \dfrac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$:

Ici: • $f(x) = \dfrac{0,4}{20e^{-x}+1} + 0,4$

• $Df = [0;8]$.

Posons: $f = \dfrac{f_1}{3f_2 + f_3} + f_1$, avec: $f_1(x) = 0,4$, $f_2(x) = e^{-x}$ et $f_3(x) = 1$.

f_1 et f_3 sont dérivables sur IR comme fonctions polynômes, donc dérivables sur l'intervalle $[0;8]$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur l'intervalle $[0;8]$.

Par conséquent, $h = 3f_2 + f_3$ est dérivable sur $[0;8]$ comme somme de 2 fonctions dérivables sur $[0;8]$.

De plus, $\dfrac{f_1}{h}$ est dérivable sur $[0;8]$ comme quotient de 2 fonctions dérivables sur $[0;8]$, avec: pour tout $x \in [0;8]$, $h(x) \neq 0$.

Enfin, f est dérivable sur $[0;8]$ comme somme $\left(\dfrac{f_1}{h} + f_1\right)$ de 2 fonctions dérivables sur $[0;8]$.

Ainsi: nous pouvons calculer f' pour tout $x \in [0;8]$.

Pour tout $x \in [0;8]$: $f'(x) = \dfrac{-0,4 \times (-20e^{-x})}{(20e^{-x}+1)^2}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}.$$

Au total: pour tout $x \in [0;8]$, $f'(x) = \dfrac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$.

2. Déterminons l'intervalle sur lequel f est convexe:

Ici: • $f'(x) = \dfrac{8e^{-x}}{(20e^{-x}+1)^2}$

• $f''(x) = g(x) = 8e^{-x}.\left(\dfrac{20e^{-x}-1}{(20e^{-x}+1)^3}\right)$.

Nous savons que f est convexe ssi: $f''(x) \geqslant 0 \iff g(x) \geqslant 0$.

$g(x) \geqslant 0 \iff 8e^{-x}.\left(\dfrac{20e^{-x}-1}{(20e^{-x}+1)^3}\right) \geqslant 0$.

Or: pour tout $x \in [0;8]$, $8e^{-x} > 0$ et $(20e^{-x}+1)^3 > 0$.

D'où: $g(x) \geqslant 0$ ssi: $20e^{-x} - 1 \geqslant 0$ cad ssi: $e^{-x} \geqslant \dfrac{1}{20} \Rightarrow x \leqslant \ln(20)$.

Au total, f est convexe sur l'intervalle: $[0;\ln(20)]$.

Partie B:

Proposition 1: " L'altitude du village B est 0,6 km ".

C'est faux.

Justifions le.

L'altitude associée, en kilomètres, du village B est: $f(8)$.

Or: $f(8) \approx 0,797$ km.

Au total, l'altitude du village B est d'environ: 797 mètres, et pas 600 mètres.

Proposition 2: **" L'écart d'altitude entre les villages A et B est de 378 mètres "**.

C'est vrai.

Justifions le.

Il s'agit de calculer ici: $f(8) - f(0)$.

$f(8) - f(0) \approx 0,797 - 0,419 \Rightarrow f(8) - f(0) \approx 0,378$.

Au total, l'écart d'altitude entre les villages A et B est bien de: 378 mètres.

Proposition 3: **" La pente en A vaut 1,8% "**.

C'est vrai.

Justifions le.

Il s'agit de calculer ici: $f'(0)$.

$$f'(0) = \frac{8e^{-0}}{(20e^{-0} + 1)^2} \Rightarrow f'(0) \approx 0,018.$$

Au total, la pente en A vaut environ: 1,8%.

Proposition 4: " Le projet de route ne sera pas accepté ".

C'est faux.

Justifions le.

Le projet sera accepté à condition qu'en aucun point de la courbe, la pente ne dépasse 12%.

Il s'agit de calculer ici la pente au maximum de la courbe, pour $x \in [0;8]$.

Or, le maximum est atteint au point: $x = \ln(20)$.

Dans ces conditions, la pente de f quand $x = \ln(20)$ est:

$f'(\ln(20)) = 0,1$ => $f'(\ln(20)) = 10\%$.

Au total, le projet sera accepté car au maximum de la courbe, la pente est égale à: $10\% < 12\%$.