

Annales Mathématiques Bac 2014
Sujets + Corrigés - Alain Pillier
Centres étrangers

Alain PILLER — Sujet 5

Sujet Mathématiques Bac 2014
 probabilités ES - corrigé

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Une grande entreprise vient de clôturer sa campagne de recrutement qui s'est déroulée en deux temps :

- premier temps : étude du dossier présenté par le candidat ;
- deuxième temps : entretien en vue du recrutement.

Le processus de recrutement mis en œuvre par l'entreprise est le suivant :

- si le dossier est jugé de bonne qualité, alors le candidat est reçu en entretien par le directeur des ressources humaines ;
- si le dossier n'est pas jugé de bonne qualité, alors le candidat subit des tests puis est reçu en entretien par le directeur de l'entreprise.

Dans les deux cas, à l'issue de l'entretien, le candidat est recruté ou ne l'est pas.

À l'issue de cette campagne de recrutement, l'entreprise publie les résultats suivants :

- 30 % des candidats avaient un dossier jugé de bonne qualité ;
- 20 % des candidats n'ayant pas un dossier jugé de bonne qualité ont été recrutés ;
- 38 % des candidats ont été recrutés.

1. On prend un candidat au hasard et on note :

- D l'évènement « le candidat a un dossier jugé de bonne qualité » ;
- R l'évènement « le candidat est recruté par l'entreprise ».

- a. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- b. Calculer la probabilité que le candidat n'ait pas un dossier de bonne qualité et ne soit pas recruté par l'entreprise.
- c. Montrer que la probabilité de l'évènement $D \cap R$ est égale à 0,24.
- d. En déduire la probabilité qu'un candidat soit recruté sachant que son dossier est jugé de bonne qualité. Compléter l'arbre pondéré réalisé dans la question a.

2. Dix personnes postulent pour un emploi dans l'entreprise. Les études de leurs candidatures sont faites indépendamment les unes des autres. On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi les 10 personnes.

- a. Justifier que X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,38$.
- b. Calculer la probabilité qu'au moins une des dix personnes soit recrutée. On donnera la valeur exacte puis une valeur du résultat arrondie à 10^{-3} .

3. Deux amis, Aymeric et Coralie, sont convoqués le même jour pour un entretien avec la direction des ressources humaines.

Coralie arrive à 8 h 30 alors qu'Aymeric arrive au hasard entre 8 h et 9 h.

On désigne par T la variable aléatoire donnant l'heure d'arrivée d'Aymeric et on admet que T suit la loi uniforme sur l'intervalle $[8 ; 9]$.

Déterminer la probabilité pour que Coralie attende Aymeric plus de dix minutes.

EXERCICE 2

6 points

Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = xe^{x^2-1}.$$

\mathcal{C}_f est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan. On note f' la fonction dérivée de f et f'' la fonction dérivée seconde de f .

1. **a.** Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = (2x^2 + 1)e^{x^2-1}$.
b. En déduire le sens de variation de f sur \mathbb{R} .
2. On admet que pour tout réel x , $f''(x) = 2x(2x^2 + 3)e^{x^2-1}$.
 Déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.
3. Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par

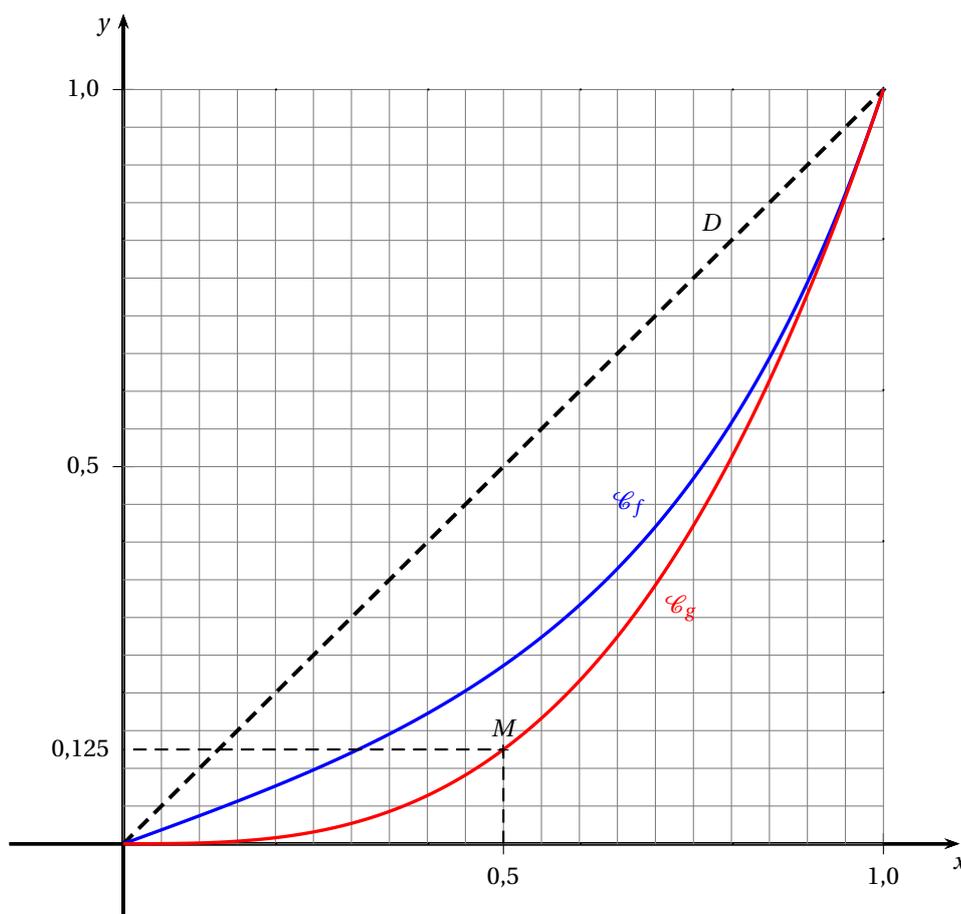
$$h(x) = x(1 - e^{x^2-1}).$$

- a.** Justifier que l'inéquation $1 - e^{x^2-1} \geq 0$ a pour ensemble de solutions l'intervalle $[-1; 1]$.
 - b.** Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1; 1]$.
 - c.** En remarquant que pour tout réel x , on a l'égalité $h(x) = x - f(x)$, déduire de la question précédente la position relative de la courbe \mathcal{C}_f et de la droite D d'équation $y = x$ sur l'intervalle $[0; 1]$.
4. Soit H la fonction définie sur \mathbb{R} par $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{x^2-1}$ et soit $I = \int_0^1 h(x) dx$.
 On admet que H est une primitive de la fonction h sur \mathbb{R} .
 Calculer la valeur exacte de I .

Partie B : Applications

Sur le graphique suivant, sont tracées sur l'intervalle $[0; 1]$:

- la courbe \mathcal{C}_f représentative de la fonction étudiée en partie A ;
- la courbe \mathcal{C}_g représentative de la fonction définie par $g(x) = x^3$;
- la droite D d'équation $y = x$.



Les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g illustrent ici la répartition des salaires dans deux entreprises F et G :

- sur l'axe des abscisses, x représente la proportion des employés ayant les salaires les plus faibles par rapport à l'effectif total de l'entreprise ;
- sur l'axe des ordonnées, $f(x)$ et $g(x)$ représentent pour chaque entreprise la proportion de la masse salariale (c'est-à-dire la somme de tous les salaires) correspondante.

Par exemple :

Le point $M(0,5 ; 0,125)$ est un point appartenant à la courbe \mathcal{C}_g . Pour l'entreprise G cela se traduit de la façon suivante :

si on classe les employés par revenu croissant, le total des salaires de la première moitié (c'est-à-dire des 50 % aux revenus les plus faibles) représente 12,5 % de la masse salariale.

1. Calculer le pourcentage de la masse salariale détenue par 80 % des employés ayant les salaires les plus faibles dans l'entreprise F. On donnera une valeur du résultat arrondie à l'unité.
2. On note \mathcal{A}_f l'aire du domaine délimité par la droite D , la courbe \mathcal{C}_f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.
On appelle indice de Gini associé à la fonction f , le nombre réel noté I_f et défini par $I_f = 2 \times \mathcal{A}_f$.
 - a. Montrer que $I_f = \frac{1}{e}$.
 - b. On admet que, plus l'indice de Gini est petit, plus la répartition des salaires dans l'entreprise est égalitaire. Déterminer, en justifiant, l'entreprise pour laquelle la distribution des salaires est la plus égalitaire.

EXERCICE 3

5 points

Candidats de la série ES n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité et candidats de la série L

Dans une ville, un nouveau lycée vient d'ouvrir ses portes et accueille pour sa première rentrée 500 élèves. D'une année sur l'autre, le proviseur du lycée prévoit une perte de 30 % de l'effectif et l'arrivée de 300 nouveaux élèves.

On modélise cette situation par une suite numérique (u_n) où u_n représente le nombre d'élèves inscrits au lycée pour l'année $2013 + n$, avec n entier naturel. On a donc $u_0 = 500$.

1. a. Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2014.
b. Calculer le nombre d'élèves qui seront inscrits au lycée en 2015.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = 0,7u_n + 300$.
3. On souhaite, pour un entier n donné, afficher tous les termes de la suite (u_n) du rang 0 au rang n .

Lequel des trois algorithmes suivants permet d'obtenir le résultat souhaité? Justifier.

Algorithme 1	Algorithme 2	Algorithme 3
Variables : n, i entiers naturels, u nombre réel	Variables : n, i entiers naturels, u nombre réel	Variables : n, i entiers naturels, u nombre réel
Début algorithme Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n Afficher u	Début algorithme Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n Afficher u	Début algorithme Lire n u prend la valeur 500 Pour i allant de 1 à n u prend la valeur $0,7 \times u + 300$ Fin Pour
u prend la valeur $0,7 \times u + 300$ Fin Pour	u prend la valeur $0,7 \times u + 300$ Fin Pour Afficher u	Afficher u
Fin algorithme	Fin algorithme	Fin algorithme

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1000$.
 - a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,7$.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1000 - 500 \times 0,7^n$.
 - c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
 - d. Interpréter le résultat précédent.
5.
 - a. Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation $u_n \geq 990$.
 - b. Interpréter le résultat trouvé précédemment.

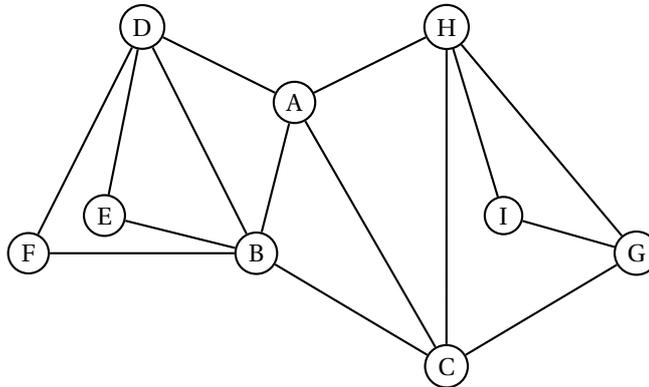
EXERCICE 3

5 points

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A : Étude d'un graphe

On considère le graphe \mathcal{G} ci-dessous.



1.
 - a. Déterminer en justifiant si le graphe \mathcal{G} est complet.
 - b. Déterminer en justifiant si le graphe \mathcal{G} est connexe.
2.
 - a. Donner le degré de chacun des sommets du graphe \mathcal{G} .
 - b. Déterminer en justifiant si le graphe \mathcal{G} admet un cycle eulérien ou une chaîne eulérienne.
3.
 - a. Donner la matrice M associée au graphe \mathcal{G} (les sommets seront rangés dans l'ordre alphabétique).

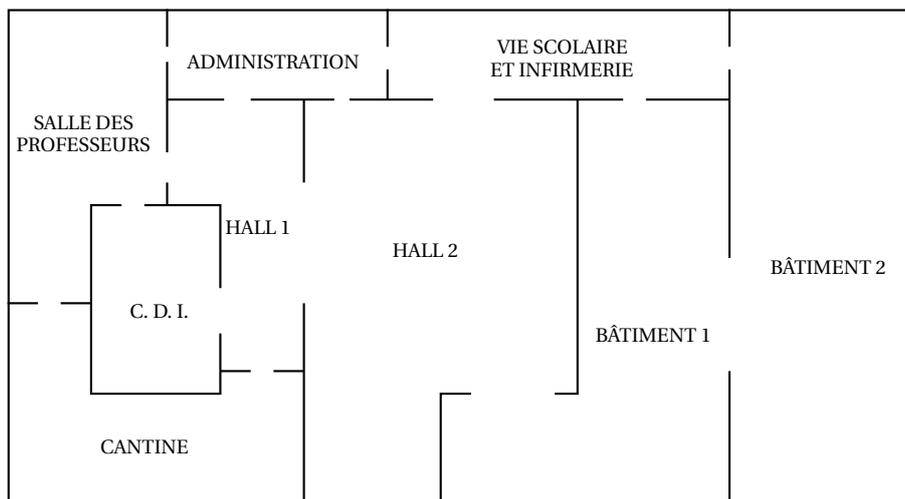
b. On donne : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer, par le calcul, que le coefficient de la septième ligne et quatrième colonne de la matrice M^3 est égal à 3.

Partie B : Applications

Dans cette partie, on pourra justifier les réponses en s'aidant de la partie A

On donne ci-dessous le plan simplifié d'un lycée



1. Le graphe \mathcal{G} donné en partie A modélise cette situation.

Recopier et compléter le tableau suivant :

Sommet du graphe \mathcal{G}	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Lieu correspondant dans le lycée									

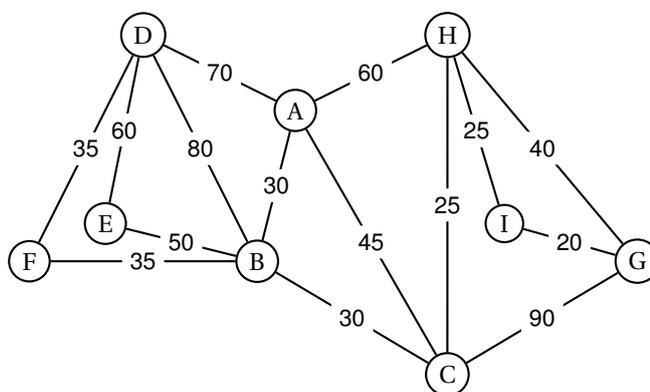
2. Un élève a cours de mathématiques dans le bâtiment 1. À la fin du cours, il doit rejoindre la salle des professeurs pour un rendez vous avec ses parents.

Déterminer le nombre de chemins en trois étapes permettant à l'élève de rejoindre ses parents puis indiquer quels sont ces chemins.

3. Le lycée organise une journée portes-ouvertes.

a. Déterminer, en justifiant, s'il est possible de visiter le lycée en empruntant une seule fois chaque passage entre les différents lieux.

b. Sur les arêtes du graphe \mathcal{G} sont indiqués les temps de parcours exprimés en seconde entre deux endroits du lycée.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, le chemin permettant de relier le sommet G au sommet D en un temps minimal.

Déterminer ce temps minimal, exprimé en seconde.

Sujet Mathématiques Bac 2014
probabilités ES - corrigé

EXERCICE 4

Commun à tous les candidats

4 points

L'entreprise Printfactory fabrique, en grande quantité, des cartouches d'encre noire pour imprimante.

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse **en justifiant votre réponse**.

1. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque cartouche produite, associe sa durée de vie exprimée en nombre de pages.

On admet que X suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart-type $\sigma = 10$.

- a. **Affirmation 1 :** Environ 95 % des cartouches produites ont une durée de vie comprise entre 230 et 270 pages.
- b. **Affirmation 2 :** Moins de 50 % des cartouches produites ont une durée de vie inférieure à 300 pages.

2. L'entreprise Printfactory a amélioré son procédé industriel et déclare que 80 % des cartouches produites ont une durée de vie supérieure à 250 pages.

Un contrôleur désigné par l'entreprise effectue un test en prélevant de façon aléatoire un échantillon de cartouches dans la production.

Dans un échantillon de taille 1 000, le contrôleur a obtenu 240 cartouches vides d'encre avant l'impression de 250 pages.

Affirmation 3 : Le contrôleur valide la déclaration de l'entreprise.

3. L'entreprise Printfactory souhaite connaître l'opinion de ses 10 000 clients quant à la qualité d'impression de ses cartouches.

Pour cela, elle souhaite obtenir, à partir d'un échantillon aléatoire, une estimation de la proportion de clients satisfaits au niveau 0,95 avec un intervalle de confiance d'amplitude inférieure ou égale à 4 %.

Affirmation 4 : L'entreprise doit interroger au moins un quart de ses clients.

EXERCICE 1 (Centres Etrangers 2014)

③ Déterminons la probabilité que Coralie attende Ayméric plus de 40 minutes:

D'après l'énoncé, nous savons que:

• T suit une loi uniforme sur l'intervalle $[8; 9]$.

Dans ces conditions:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1} & \text{si } x \in [8; 9] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$P(a \leq T \leq b) = \frac{b-a}{1}$$

Il s'agit de calculer: $P(8h40 \leq T \leq 9)$.

$$\begin{aligned} P(8h40 \leq T \leq 9) &= P\left(8 + \frac{2}{3} \leq T \leq 9\right) \quad (40mn = \frac{2}{3} \text{ d'une heure}) \\ &= 9 - \left(8 + \frac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

D'où: $P(8h40 \leq T \leq 9) = \frac{1}{3}$.

La probabilité demandée est: $\frac{1}{3} \approx 33,34\%$.

EXERCICE 4 (Centres Etrangers 2014)

① Déterminons si les affirmations 1 et 2 sont vraies ou fausses, en justifiant:

D'après l'énoncé, nous savons que:

- X est la variable aléatoire qui, à chaque cartouche produite, associe sa durée de vie (en nb. de pages).
- X suit la loi normale d'espérance $\mu = 250$ et d'écart type $\sigma = 10$.
- T suit la loi normale centrée réduite.

Affirmation 1: elle est vraie.

Il s'agit de calculer: $P(230 \leq X \leq 270)$.

Nous remarquons que: $230 = \mu - 2\sigma$ et $270 = \mu + 2\sigma$.

Or, d'après le cours, $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954$.

D'où: $P(230 \leq X \leq 270) \approx 0,95$.

Affirmation 2: elle est fautive.

Il s'agit de calculer: $P(X \leq 300)$.

$$P(X \leq 300) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{300 - 250}{10}\right)$$

$$= P(T \leq 5).$$

A l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$\underline{P(X \leq 300) \approx 1} > 0,5. \quad (0,5 = 50\%)$$