

Sujet + Corrigé

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC ES

SUITES - 2014

SUJET 1
FRANCE MÉTROPOLITAINE
BAC ES - 2014

CORRECTION RÉALISÉE
PAR ALAIN PILLER



**Annales Mathématiques Bac 2014
Sujets + Corrigés - Alain Piller
France Métropolitaine**

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session 2014

**MATHÉMATIQUES – Série ES
ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE**

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 5

**MATHÉMATIQUES – Série L
ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**

Durée de l'épreuve : 3 heures – coefficient : 4

SUJET

ÉPREUVE DU VENDREDI 20 JUIN 2014

L'usage de la calculatrice est autorisé.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le candidat s'assurera que le sujet est complet, qu'il correspond bien à sa série et à son choix d'enseignement (obligatoire ou spécialité).

Le sujet comporte 6 pages, y compris celle-ci ; la page 6 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

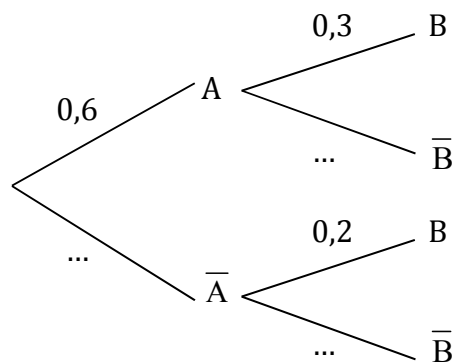
Pour chacune des questions posées, une seule des quatre réponses est exacte.

Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point.

1. L'arbre de probabilités ci-dessous représente une situation où A et B sont deux événements, dont les événements contraires sont respectivement notés \bar{A} et \bar{B} .



Alors

- a) $P_A(B) = 0,18$ b) $P(A \cap B) = 0,9$ c) $P_A(\bar{B}) = 0,7$ d) $P(B) = 0,5$
2. Avec le même arbre, la probabilité de l'événement B est égale à :
- a) 0,5 b) 0,18 c) 0,26 d) 0,38
3. On considère une fonction f définie et continue sur l'intervalle $[1 ; 15]$. Son tableau de variation est indiqué ci-dessous.

x	1	3	4	12	15
$f(x)$	3		-2	-1	-3

Arrows in the table indicate: 3 to 0 (between 1 and 3), 0 to -2 (between 3 and 4), -2 to -1 (between 4 and 12), and -1 to -3 (between 12 and 15).

Soit F une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; 15]$. On peut être certain que :

- a) La fonction F est négative sur l'intervalle $[3 ; 4]$.
 b) La fonction F est positive sur l'intervalle $[4 ; 12]$.
 c) La fonction F est décroissante sur l'intervalle $[4 ; 12]$.
 d) La fonction F est décroissante sur l'intervalle $[1 ; 3]$.

4. Pour tout réel x de l'intervalle $] 0 ; +\infty [$:
l'équation $\ln x + \ln(x + 3) = 3\ln 2$ est équivalente à l'équation :

a) $2x + 3 = 6$ b) $2x + 3 = 8$ c) $x^2 + 3x = 6$ d) $x^2 + 3x = 8$

5. g est la fonction définie sur l'intervalle $] 0 ; +\infty [$ par $g(x) = \frac{5}{x}$.

On note C sa courbe représentative.

L'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine délimité par la courbe C , l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = 2$ et $x = 6$, est égale à :

a) $5(\ln 6 - \ln 2)$ b) $\frac{1}{6-2} \int_2^6 g(x) dx$ c) $5 \ln 6 + 5 \ln 2$ d) $g(6) - g(2)$

Sujet Mathématiques Bac 2014
suites ES - corrigé

Exercice 2 : (5 points)

À l'automne 2010, Claude achète une maison à la campagne ; il dispose d'un terrain de 1500m^2 entièrement engazonné. Mais tous les ans, 20% de la surface engazonnée est détruite et remplacée par de la mousse. Claude arrache alors, à chaque automne, la mousse sur une surface de 50m^2 et la remplace par du gazon.

Pour tout nombre entier naturel n , on note u_n la surface en m^2 de terrain engazonné au bout de n années, c'est-à-dire à l'automne 2010 + n . On a donc $u_0 = 1\,500$.

1. Calculer u_1 .
2. Justifier que, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = 0,8 u_n + 50$.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par : $v_n = u_n - 250$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Préciser son premier terme et sa raison.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n .
En déduire que, pour tout nombre entier naturel n , $u_n = 250 + 1\,250 \times 0,8^n$.
 - c) Quelle est la surface de terrain engazonné au bout de 4 années ?
4.
 - a) Déterminer par le calcul la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que :
$$250 + 1\,250 \times 0,8^n < 500$$
Interpréter le résultat obtenu.
 - b) Compléter l'algorithme fourni en **annexe 1** pour qu'il affiche la solution obtenue à la question précédente.
5. Claude est certain que les mauvaises herbes ne peuvent envahir la totalité de son terrain. A-t-il raison ? Justifier la réponse.

Exercice 3 : (5 points)

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A :

Chaque jour, Antoine s'entraîne au billard américain pendant une durée comprise entre 20 minutes et une heure. On modélise la durée de son entraînement, en minutes, par une variable aléatoire X qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[20 ; 60]$.

1. Calculer la probabilité p pour que l'entraînement dure plus de 30 minutes.
2. Calculer l'espérance de X . Interpréter ce résultat.

Partie B :

Dans cette partie les probabilités seront, si besoin, arrondies au millième.

Les boules de billard américain avec lesquelles Antoine s'entraîne sont dites de premier choix si leur diamètre est compris entre 56,75 mm et 57,25 mm ; sinon elles sont dites de second choix.

On note D la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production de l'entreprise, associe son diamètre, en millimètres.

On suppose que D suit la loi normale d'espérance 57 et d'écart-type 0,11.

1. Déterminer la probabilité p_1 que la boule prélevée ait un diamètre inférieur à 57mm.
2. Déterminer la probabilité p_2 que la boule prélevée soit une boule de premier choix.
3. En déduire la probabilité p_3 que la boule prélevée soit une boule de second choix.

Partie C :

Le président de la fédération française de billard (FFB) souhaite estimer le niveau de satisfaction de ses 14 000 licenciés quant à l'organisation des tournois.

Antoine estime que les 80 adhérents de son club constituent un échantillon représentatif des licenciés de la FFB. Il est chargé de faire une étude au sein de son club : les 80 adhérents ont répondu, et 66 ont déclaré qu'ils étaient satisfaits.

1. Quelle est, sur cet échantillon, la fréquence observée f de personnes satisfaites de la FFB ?
2. Déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 de la proportion p de licenciés satisfaits de la FFB. Les bornes de l'intervalle seront arrondies au millième.

Exercice 4 : (5 points)

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie en **annexe 2**.

A. Étude graphique :

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. la concentration à l'instant initial ;
2. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.
On fera apparaitre sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. Étude théorique :

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 15]$ par : $f(x) = (x + 2)e^{-0,5x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Justifier que $f'(x) = -0,5xe^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; 15]$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0 ; 15]$.
3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	<code>deriver ((x+2) * exp (-0.5*x))</code>	$\exp(-0.5 * x) - 0.5 * \exp(-0.5 * x) * (x+2)$
2	<code>deriver (exp (-0.5*x) - 0.5 * exp (-0.5*x) * (x+2))</code>	$-\exp(-0.5 * x) + 0.25 * \exp(-0.5 * x) * (x+2)$
3	<code>factoriser (-exp (-0.5*x) + 0.25 * exp (-0.5*x) * (x+2))</code>	$(0.25 * x - 0.5) * \exp(-0.5 * x)$

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

C. Interprétation des résultats :

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondez aux questions ci-dessous.

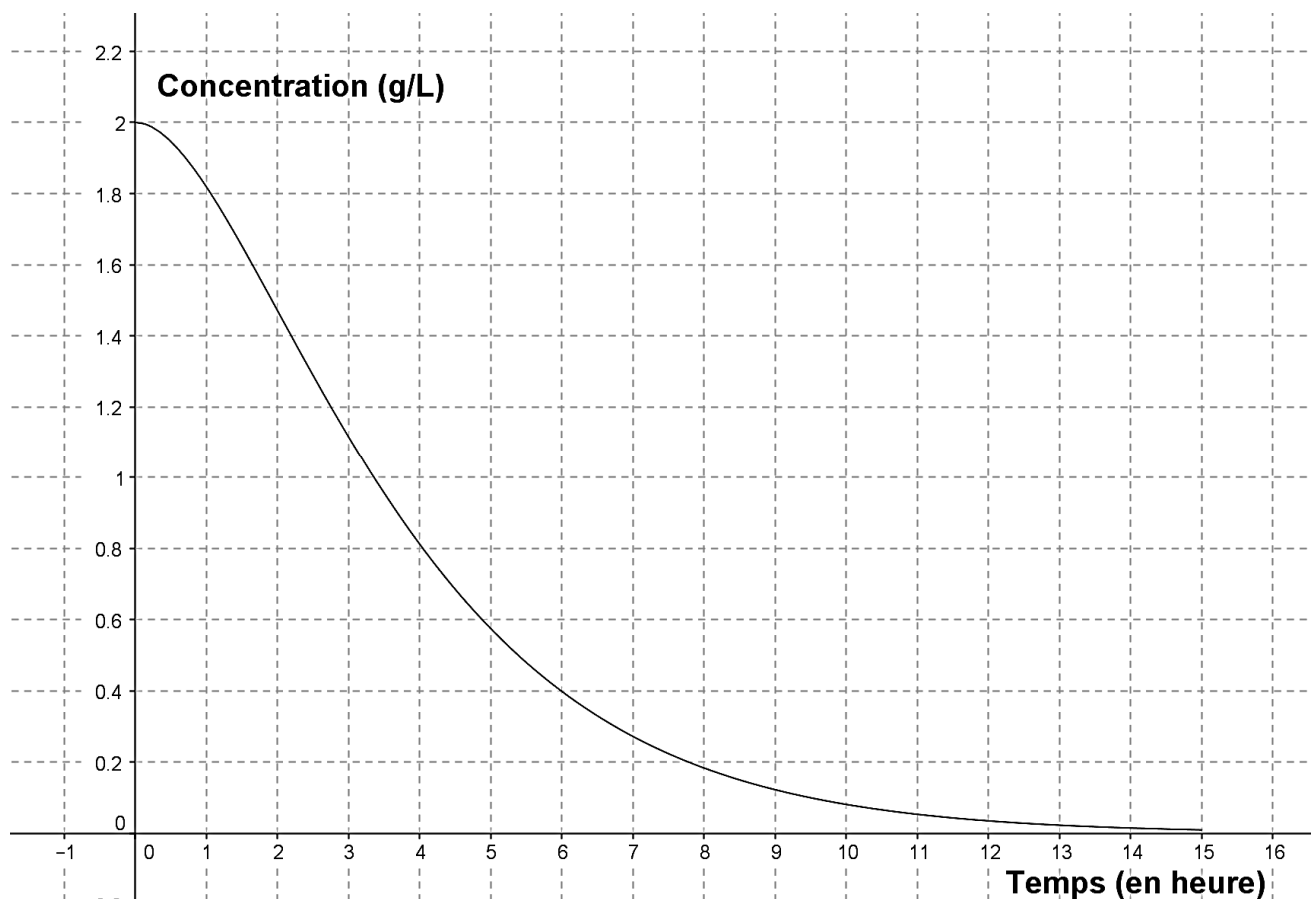
1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

Annexes – à rendre avec la copie

Annexe 1

Initialisation
u prend la valeur 1500
n prend la valeur 0
Traitement
 Tant que faire
 u prend la valeur
 n prend la valeur
 Fin Tant que
Sortie
 Afficher *n*

Annexe 2



EXERCICE 2

[France Métropolitaine 2014]

1. Calculons U_1 :

Il s'agit de calculer U_1 .

$$U_1 = (1 - 20\%) U_0 + 50 \iff U_1 = 0,8 \times 1500 + 50$$
$$\implies U_1 = 1250 \text{ m}^2.$$

Ainsi, en 2011, la surface engazonnée sera de 1250 m^2 contre 1500 m^2 en 2010.

2. Justifions que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = 0,8 U_n + 50$:

- D'après l'énoncé, Claude dispose d'un terrain de 1500 m^2 entièrement engazonné en 2010.

D'où: $U_0 = 1500$.

- De plus, chaque année 20% de la surface est détruite par la mousse et Claude remplace 50 m^2 de mousse par du gazon.

Soient: • U_{n+1} , la surface en m^2 de terrain engazonné à l'automne
(2010 + (n + 1)),

• U_n , la surface en m^2 de terrain engazonné à l'automne
(2010 + (n)).

Pour tout entier naturel n , la surface en m^2 " U_{n+1} " de terrain engazonné à l'automne est égale à la surface en m^2 " U_n " diminuée de 20% et augmentée de 50 m^2 ("mousse remplacée par du gazon").

Donc pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = U_n - 20\% U_n + 50 \iff U_{n+1} = 0,8 U_n + 50.$$

3. a. Montrons que (V_n) est géométrique et déterminons V_0 et q :

$$\begin{aligned} V_n = U_n - 250 &\iff V_{n+1} = U_{n+1} - 250 \\ &\iff V_{n+1} = (0,8 U_n + 50) - 250 \quad (1). \end{aligned}$$

$$\text{Or: } V_0 = U_0 - 250 \implies V_0 = 1250 \text{ et } U_n = V_n + 250.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } (1) &\iff V_{n+1} = (0,8 [V_n + 250] + 50) - 250 \\ &\implies V_{n+1} = 0,8 V_n. \end{aligned}$$

Par conséquent, (V_n) est bien une suite géométrique de raison $q = 0,8$ et de premier terme $V_0 = 1250$.

3. b.1. Exprimons V_n en fonction de n :

Comme $V_{n+1} = 0,8 V_n$, d'après le cours nous pouvons affirmer que:

$$V_n = V_0 \times (0,8)^n, \text{ avec: } V_0 = 1250.$$

3. b.2. Déduisons-en que pour tout entier naturel n , $U_n = 250 + 1250 \times (0,8)^n$:

$$\text{Nous savons que: } * V_n = 1250 \times (0,8)^n$$

$$* U_n = V_n + 250.$$

$$\text{D'où: } U_n = 1250 \times (0,8)^n + 250 \quad (a).$$

3. c. La surface de terrain engazonné au bout de 4 ans ?

Il s'agit de calculer U_4 .

$$\text{D'après la formule (a): } U_4 = 1250 \times (0,8)^4 + 250,$$

$$\text{cad: } U_4 = 762 \text{ m}^2.$$

Donc, au bout de 4 ans, la surface de terrain engazonné sera de: 762 m^2 .

4. a. Déterminons n tel que $U_n < 500$:

$$U_n < 500 \Leftrightarrow 250 + 1250 \times (0,8)^n < 500$$

$$\Leftrightarrow 1250 \times (0,8)^n < 250$$

$$\Leftrightarrow (0,8)^n < 0,2$$

$$\Leftrightarrow n \times \ln(0,8) < \ln(0,2)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)}, \text{ car: } 0,8 \in]0, 1[, \text{ et donc: } \ln(0,8) < 0$$

$$\Rightarrow n > 7,2.$$

Nous prendrons $n = 8$ ans car n est un entier naturel.

4. b. Interprétation:

Cela signifie qu'après 8 ans, la surface engazonnée sera strictement inférieure à 500 m^2 .

5. A-t-il raison ? Justifions notre réponse:

Cela revient à calculer la valeur de U_n quand n tend vers $+\infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 250 + 1250 (0,8)^n$$

$$= 250 \text{ car: } \lim_{n \rightarrow +\infty} (0,8)^n = 0, \text{ car: } 0,8 \in]-1, 1[.$$

Donc oui Claude a raison car au bout de " n " années (" n " très grand), il lui restera toujours 250 m^2 de surface engazonnée.