

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 7 pages numérotées de 1/7 à 7/7 dont une annexe en page 7/7 qui est à rendre avec la copie.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. **Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.** Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (4 points)**Commun à tous les candidats**

On considère un solide $ADECBF$ constitué de deux pyramides identiques ayant pour base commune le carré $ABCD$ de centre I . Une représentation en perspective de ce solide est donnée **en annexe (à rendre avec la copie)**. Toutes les arêtes sont de longueur 1.

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AK})$

1.
 - a) Montrer que $IE = \frac{\sqrt{2}}{2}$. En déduire les coordonnées des points I , E et F .
 - b) Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABE) .
 - c) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABE) .
2. On nomme M le milieu du segment $[DF]$ et N celui du segment $[AB]$.
 - a) Démontrer que les plans (FDC) et (ABE) sont parallèles.
 - b) Déterminer l'intersection des plans (EMN) et (FDC) .
 - c) Construire sur l'**annexe (à rendre avec la copie)** la section du solide $ADECBF$ par le plan (EMN) .

EXERCICE 2 (4 points)

Commun à tous les candidats

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.

Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Dans tout l'exercice, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

Le joueur s'apprête à recevoir une série de 20 balles.

1. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite ?
2. Quelle est la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite ?

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite. Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Partie C

Pour augmenter la difficulté le joueur paramètre le lance-balle de façon à donner un effet aux balles lancées. Elles peuvent être soit « liftées » soit « coupées ». La probabilité que le lance-balle envoie une balle à droite est toujours égale à la probabilité que le lance-balle envoie une balle à gauche.

Les réglages de l'appareil permettent d'affirmer que :

- la probabilité que le lance-balle envoie une balle liftée à droite est 0,24 ;
- la probabilité que le lance-balle envoie une balle coupée à gauche est 0,235.

Si le lance-balle envoie une balle coupée, quelle est la probabilité qu'elle soit envoyée à droite ?

EXERCICE 3 (4 points)

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{1-x}}.$$

Partie A

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.
2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) = \frac{e^x}{e^x + e}$ (on rappelle que $e = e^1$).
3. Montrer alors que $\int_0^1 f(x) dx = \ln(2) + 1 - \ln(1 + e)$.

Partie B

Soit n un entier naturel. On considère les fonctions f_n définies sur $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + ne^{1-x}}$$

On note \mathcal{C}_n la courbe représentative de la fonction f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé.

On considère la suite de terme général

$$u_n = \int_0^1 f_n(x) dx$$

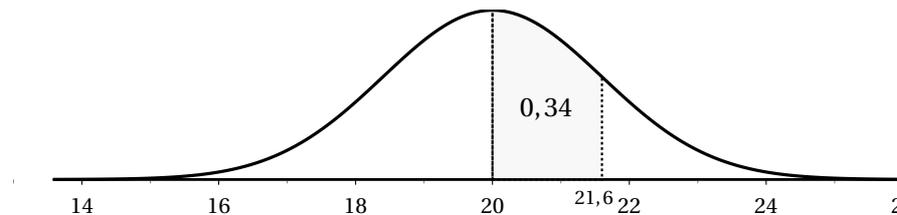
1. On a tracé **en annexe** les courbes représentatives des fonctions f_n pour n variant de 1 à 5. Compléter le graphique en traçant la courbe \mathcal{C}_0 représentative de la fonction f_0 .
2. Soit n un entier naturel, interpréter graphiquement u_n et préciser la valeur de u_0 .
3. Quelle conjecture peut-on émettre quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.
4. La suite (u_n) admet-elle une limite?

EXERCICE 4 (5 points)

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse. Un point est attribué par réponse exacte justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte et l'absence de réponse n'est pas pénalisée.

- Sur le schéma ci-dessous on a représenté la courbe de densité d'une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 20$. La probabilité que la variable aléatoire X soit comprise entre 20 et 21,6 est égale à 0,34.



Affirmation 1 : La probabilité que la variable aléatoire X appartienne à l'intervalle $[23,2; +\infty[$ vaut environ 0,046.

- Soit z un nombre complexe différent de 2. On pose :

$$Z = \frac{iz}{z-2}$$

Affirmation 2 : L'ensemble des points du plan complexe d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est une droite passant par le point $A(1; 0)$.

Affirmation 3 : Z est un imaginaire pur si et seulement si z est réel.

- Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{3}{4 + 6e^{-2x}}$$

Affirmation 4 : L'équation $f(x) = 0,5$ admet une unique solution sur \mathbb{R} .

Affirmation 5 : L'algorithme suivant affiche en sortie la valeur 0,54.

Variation :	X et Y sont des réels
Initialisation :	X prend la valeur 0 Y prend la valeur $\frac{3}{10}$
Traitement :	Tant que $Y < 0,5$ X prend la valeur $X + 0,01$ Y prend la valeur $\frac{3}{4 + 6e^{-2X}}$ Fin Tant que
Sortie :	Afficher X

EXERCICE 5 (3 points)**Commun à tous les candidats**

On considère la suite (z_n) de nombres complexes définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1}{2} i \times z_n + 5 \end{cases} .$$

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on note M_n le point d'affixe z_n .

On considère le nombre complexe $z_A = 4 + 2i$ et A le point du plan d'affixe z_A .

1. Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = z_n - z_A$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} i \times u_n$.

b) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

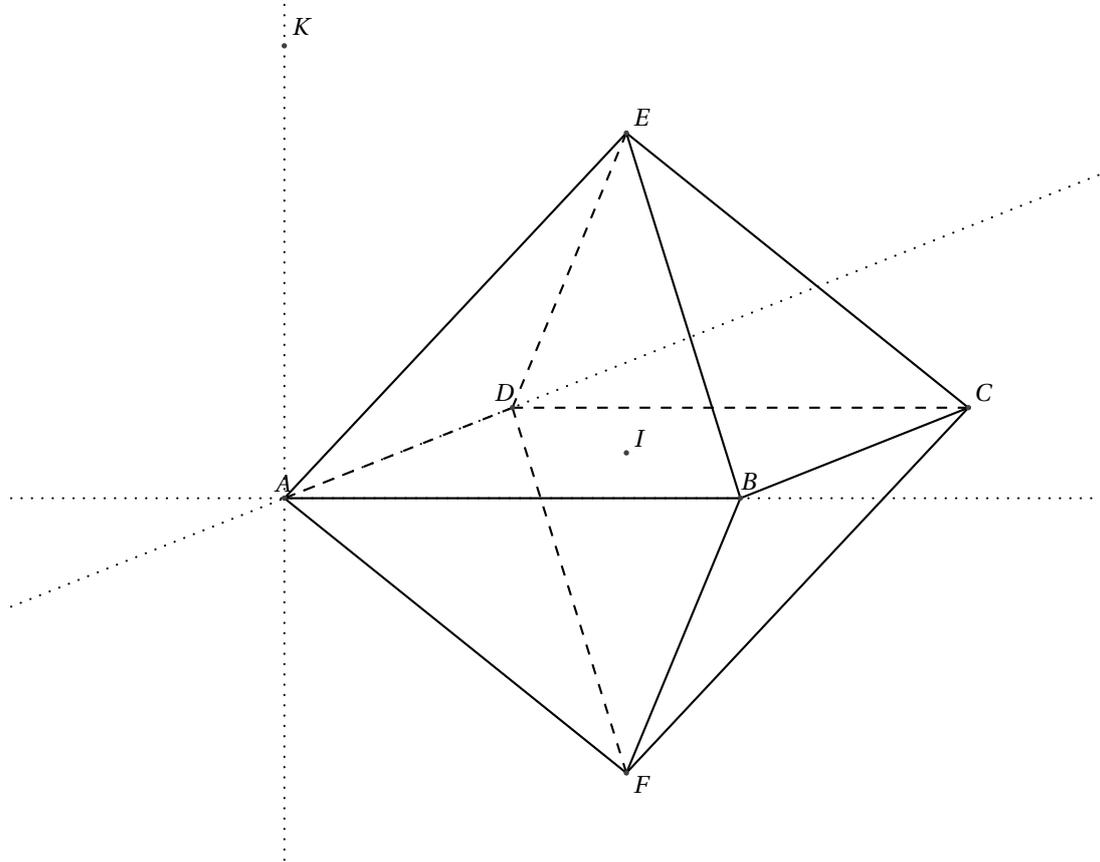
$$u_n = \left(\frac{1}{2} i\right)^n (-4 - 2i).$$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n , les points A , M_n et M_{n+4} sont alignés.

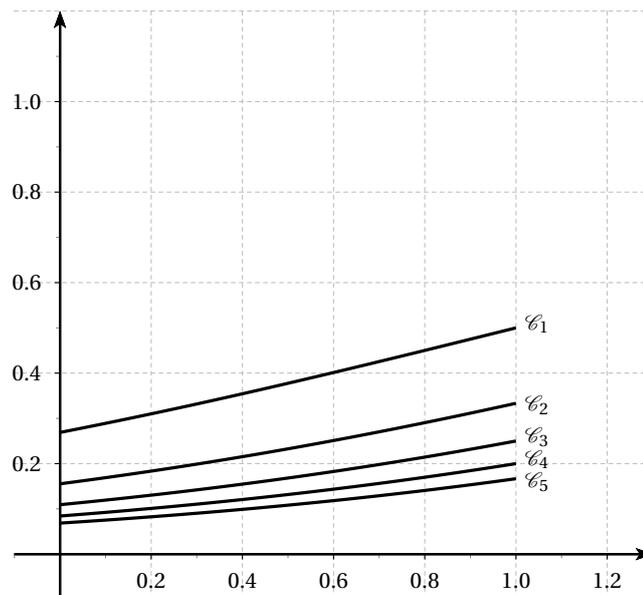
Annexe

À rendre avec la copie

Exercice 1



Exercice 3



EXERCICE 2

[Liban 2016]

Partie A: Le lance-balle

1. Déterminons la probabilité que le lance-balle envoie 10 balles à droite:

Préalablement, nous allons déterminer, en justifiant, la loi de la variable aléatoire X correspondant au nombre de balles envoyées à droite.

Soit l'expérience aléatoire consistant à envoyer une série de 20 balles.

Soient les événements $A =$ " la balle est envoyée à droite ", et $\bar{A} =$ " la balle est envoyée à gauche ".

Nous sommes en présence de 20 expériences aléatoires indépendantes, avec $\Omega = \{ A ; \bar{A} \}$ et $X(\Omega) = \{ 0, 1, 2, \dots, 20 \}$.

La variable aléatoire discrète X représentant le nombre de réalisations de A suit donc une loi binômiale de paramètres: $n = 20$ et $p = 0.5$.

Et, nous pouvons noter: $X \rightsquigarrow B(20 ; 0.5)$.

En fait, on répète 20 fois un schéma de Bernoulli.

Dans ces conditions, il s'agit de calculer:

$$P(X = 10) \text{ avec: } X \rightsquigarrow B(20 ; 0.5).$$

$$\text{Or: } P(X = 10) = \binom{20}{10} (0.5)^{10} (0.5)^{10}$$

$$\Rightarrow P(X = 10) \approx 17.6\%.$$

(à l'aide d'une machine à calculer)

Au total, il y a 17.6% de chance pour que le lance-balle envoie 10 balles à droite.

2. Déterminons la probabilité que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite:

Il s'agit de calculer: $P(5 \leq X \leq 10)$.

Or: $P(5 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 4)$.

À l'aide d'une machine à calculer, on trouve:

$$P(5 \leq X \leq 10) \approx 58.2\%$$

Au total, il y a 58.2% de chance pour que le lance-balle envoie entre 5 et 10 balles à droite.

Partie B: Le réservoir à 100 balles

Déterminons si les doutes du joueur sont justifiés:

Ici, nous avons: • $n = 100$

$$\bullet p = 50\%$$

$$\bullet f = \frac{42}{100} \Rightarrow f = 42\%$$

Dans ces conditions:

$$n = 100 \geq 30, n \cdot p = 50 \geq 5 \text{ et } n \cdot (1 - p) = 50 \geq 5.$$

Les conditions sont donc réunies.

On choisit un échantillon aléatoire de 100 balles.

Un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% s'écrit:

$$I = \left[p - 1.96 \times \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2}; p + 1.96 \times \left(\frac{p(1-p)}{n} \right)^{1/2} \right],$$

$$\text{cad: } I = \left[0.5 - 1.96 \times \left(\frac{0.5}{10} \right); 0.5 + 1.96 \times \left(\frac{0.5}{10} \right) \right].$$

À l'aide d'une machine à calculer, on trouve: $I \approx [40\%; 60\%]$.

Or la fréquence " f " de balles lancées à droite, sur l'échantillon, est telle que:

$$f = 42\% \in I.$$

Les doutes du joueur ne sont donc pas justifiés.

Partie C: Balles liftées - Balles coupées

Déterminons la probabilité que la balle soit envoyée à droite sachant que le lance-balle envoie une balle coupée:

D'après l'énoncé, nous avons:

- D = " le lance-balle envoie la balle à droite ".
- G = " le lance-balle envoie la balle à gauche ".
- L = " la balle est liftée ".
- C = " la balle est coupée ".

$$\bullet P(D) = 0.5$$

$$\bullet P(G) = 0.5$$

(0.5 + 0.5 = 1).

$$\bullet P(D \cap L) = 0.24.$$

$$\bullet P(G \cap C) = 0.235$$

(ou: $P(\bar{D} \cap \bar{L}) = 0.235$).

Ici, il s'agit de calculer: $P_C(D)$.

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)}$$

• L'événement: $C = (C \cap D) \cup (C \cap G)$.

D'où: $P(C) = P(C \cap D) + P(C \cap G)$

cad: $P(C) = P(C \cap D) + 0.235$.

• L'événement: $D = (D \cap L) \cup (D \cap C)$.

D'où: $P(D) = P(D \cap L) + P(D \cap C)$. (a)

Or: $P(D) = 0.5$ et $P(D \cap L) = 0.24$.

Par conséquent: (a) $\Leftrightarrow P(D \cap C) = 0.5 - 0.24$

$$\Rightarrow P(D \cap C) = 0.26.$$

• En définitive: $P_C(D) = \frac{0.26}{0.26 + 0.235} \Rightarrow P_C(D) = 52.5\%$.

Au total, il y a 52.5% de chance pour que la balle soit envoyée à droite sachant que le lance-balle envoie une balle coupée.