Sujet + Corrigé

ANNALES MATHÉMATIQUES BAC S

PRIMITIVES, INTÉGRALES - 2016

SUJET 6
POLYNÉSIE
BAC S - 2016

CORRECTION RÉALISÉE

PAR ALAIN PILLER

alainpiller.fr

Annales Mathématiques Bac 2016
Sujets + Corrigés - Alain Piller
Polynésie

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2016

MATHÉMATIQUES

Série S
Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 (7 points)

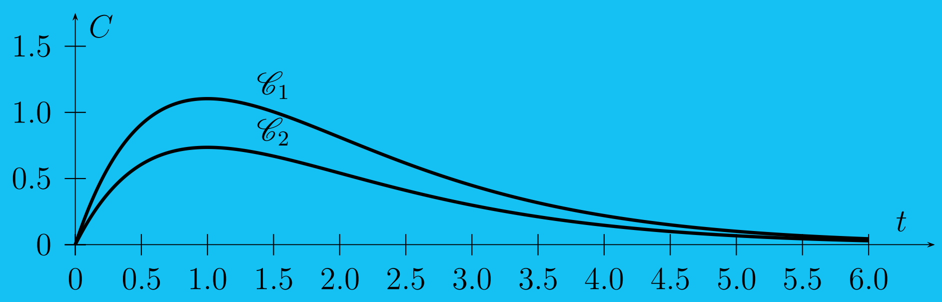
(Commun à tous les candidats)

Partie A

Voici deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1) La fonction C est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.

2) Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3) Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = Ate^{-t}$$

où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

b) L'affirmation suivante est-elle vraie ?
« À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 2te^{-t}.$$

1) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2) À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

3) Rappeler la limite de $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4) Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2$ g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

a) Démontrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que $f(t_1) = f(t_2) = 0,2$.

b) Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ? Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

5) La concentration minimale d'alcool détectable dans le sang est estimée à 5×10^{-3} g.L^{-1}.

a) Justifier qu'il existe un instant T à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

b) On donne l'algorithme suivant où f est la fonction définie par $f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}$.

Initialisation :	t prend la valeur $3,5$ p prend la valeur $0,25$ C prend la valeur $0,21$

Traitement :	Tant que $C > 5 \times 10^{-3}$ faire :
	    t prend la valeur $t + p$
	    C prend la valeur $f(t)$
	Fin Tant que

Sortie :	Afficher t

Recopier et compléter le tableau de valeurs suivant en exécutant cet algorithme.
Arrondir les valeurs à 10^{-2} près.

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0,25		
t	3,5		
C	0,21		

Que représente la valeur affichée par cet algorithme ?

EXERCICE 2 (3 points)

(commun à tous les candidats)

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, par

$$u_{n+1} = 2u_n + 2n^2 - n.$$

On considère également la suite v définie, pour tout entier naturel n, par

$$v_n = u_n + 2n^2 + 3n + 5.$$

1) Voici un extrait de feuille de tableur :

	A	B	C
1	n	u	v
2	0	2	7
3	1	4	14
4	2	9	28
5	3	24	56
6	4	63	
7			
8			
9			
10			

Quelles formules a-t-on écrites dans les cellules C2 et B3 et copiées vers le bas pour afficher les termes des suites u et v ?

2) Déterminer, en justifiant, une expression de v_n et de u_n en fonction de n uniquement.

EXERCICE 3 (5 points)

(Commun à tous les candidats)

Partie A

Un astronome responsable d'un club d'astronomie a observé le ciel un soir d'août 2015 pour voir des étoiles filantes. Il a effectué des relevés du temps d'attente entre deux apparitions d'étoiles filantes. Il a alors modélisé ce temps d'attente, exprimé en minutes, par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ. En exploitant les données obtenues, il a établi que $\lambda = 0,2$.

Il prévoit d'emmener un groupe de nouveaux adhérents de son club lors du mois d'août 2016 pour observer des étoiles filantes. Il suppose qu'il sera dans des conditions d'observation analogues à celles d'août 2015.

L'astronome veut s'assurer que le groupe ne s'ennuiera pas et décide de faire quelques calculs de probabilités dont les résultats serviront à animer la discussion.

1) Lorsque le groupe voit une étoile filante, vérifier que la probabilité qu'il attende moins de 3 minutes pour voir l'étoile filante suivante est environ $0,451$.

2) Lorsque le groupe voit une étoile filante, quelle durée minimale doit-il attendre pour voir la suivante avec une probabilité supérieure à $0,95$? Arrondir ce temps à la minute près.

3) L'astronome a prévu une sortie de deux heures. Estimer le nombre moyen d'observations d'étoiles filantes lors de cette sortie.

Partie B

Ce responsable adresse un questionnaire à ses adhérents pour mieux les connaître. Il obtient les informations suivantes :

- 64 % des personnes interrogées sont des nouveaux adhérents ;
- 27 % des personnes interrogées sont des anciens adhérents qui possèdent un télescope personnel ;
- 65 % des nouveaux adhérents n'ont pas de télescope personnel.

1) On choisit un adhérent au hasard. Montrer que la probabilité que cet adhérent possède un télescope personnel est $0,494$.

2) On choisit au hasard un adhérent parmi ceux qui possèdent un télescope personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un nouvel adhérent ? Arrondir à 10^{-3} près.

Partie C

Pour des raisons pratiques, l'astronome responsable du club souhaiterait installer un site d'observation sur les hauteurs d'une petite ville de 2 500 habitants. Mais la pollution lumineuse due à l'éclairage public nuit à la qualité des observations. Pour tenter de convaincre la mairie de couper l'éclairage nocturne pendant les nuits d'observation, l'astronome réalise un sondage aléatoire auprès de 100 habitants et obtient 54 avis favorables à la coupure de l'éclairage nocturne.

L' astronome fait l'hypothèse que 50 % de la population du village est favorable à la coupure de l'éclairage nocturne. Le résultat de ce sondage l'amène-t-il à changer d'avis ?

EXERCICE 4 (5 points)

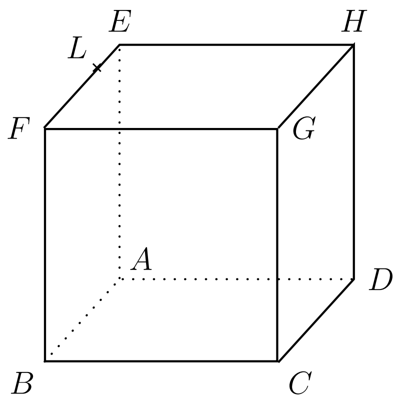
(Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.
Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) Proposition 1 :
Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3i,\ z_B = 1 + i$ et $z_C = -4i$ ne sont pas alignés.

2) Proposition 2 :
Il n'existe pas d'entier naturel n non nul tel que $[i(1+i)]^{2n}$ soit un réel strictement positif.

3) $ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. Le point L est tel que $\overrightarrow{EL} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{EF}$.



Proposition 3 :
La section du cube par le plan (BDL) est un triangle.

Proposition 4 :
Le triangle DBL est rectangle en B.

4) On considère la fonction f définie sur l'intervalle [2 ; 5] et dont on connaît le tableau de variations donné ci-dessous :

x	2	3	4	5
Variations de f	3 ↘	0 ↗	1 ↗	2

Proposition 5 :
L'intégrale $\displaystyle\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ est comprise entre $1,5$ et 6.

EXERCICE 1

[Polynésie 2016]

Partie A: Étude de fonction

1. Déterminons à quel instant la vitesse est maximale:

D'après l'énoncé, à un instant $t \geqslant 0$, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est $C'(t)$.

Or, $C'(t)$ correspond à la pente de la tangente aux courbes C_1 et C_2, en un point donné d'abscisse t.

Graphiquement, cette dernière est maximale quand:

- $t = 0$, pour C_1
- $t = 0$, pour C_2.

En définitive, dans les 2 cas, la vitesse est maximale quand: $t = 0$.

2. Déterminons la courbe correspondante à la personne la plus corpulente:

Une personne de forte corpulence subit moins vite les effets de l'alcool, donc:

la courbe C_2 correspond à la personne la plus corpulente.

3. a. Déterminons $f'(0)$:

Ici:
- $f(t) = A\,t\,e^{-t}$
- $Df = [0;+\infty[$.

Posons: $f = f_1 \times f_2$, avec: $f_1(t) = A.t$ et $f_2(t) = e^{-t}$.

f_1 est dérivable sur IR comme fonction polynôme, donc dérivable sur $[0;+\infty[$.

f_2 est dérivable sur IR comme fonction " exponentielle ", donc dérivable sur $[0;+\infty[$.

Par conséquent, f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme produit de 2 fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$.

Ainsi, nous pouvons calculer f' pour tout $t \in [0;+\infty[$.

Pour tout $t \in [0;+\infty[$: $f'(t) = (A \times e^{-t}) + (A \times t \times (-e^{-t}))$

$$\Rightarrow f'(t) = A\, e^{-t}\, (1 - t).$$

Dans ces conditions: $f'(0) = A$.

Au total: $f'(0) = A$.

3. b. L'affirmation est-elle vraie ?

FAUX: d'après la question 2.

Partie B: Un cas particulier

1. Étudions les variations de f sur $[0;+\infty[$:

Ici: • $A = 2$, car: $f(t) = 2te^{-t}$

• $f'(t) = 2e^{-t}(1 - t)$.

Nous allons distinguer 3 cas, pour tout t de $[0;+\infty[$.

1er cas: $f'(t) = 0$.

$f'(t) = 0 \iff 2e^{-t}(1 - t) = 0$

$\iff 1 - t = 0$, car $2e^{-t} > 0$

$\Rightarrow t = 1$.

2eme cas: $f'(t) < 0$.

$f'(t) < 0 \iff 2e^{-t}(1 - t) < 0$

$\iff 1 - t < 0$, car $2e^{-t} > 0$

$\Rightarrow t > 1$ ou $t \in]1;+\infty[$.

3eme cas: $f'(t) > 0$.

$f'(t) > 0 \iff 2e^{-t}(1 - t) > 0$

$\iff 1 - t > 0$, car $2e^{-t} > 0$

$\Rightarrow t < 1$ ou $t \in [0;1[$.

Au total:
- f est décroissante sur $[1;+\infty[$,
  (car sur $[1;+\infty[$, $f'(t) \leqslant 0$)
- f est croissante sur $[0;1]$.
  (car sur $[0;1]$, $f'(t) \geqslant 0$)

Nous pouvons dresser alors le tableau de variation suivant:

t	0		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	a	$\nearrow$	b	$\searrow$	c

Avec: • $a = f(0) \Rightarrow a = 0$,

• $b = f(1) \Rightarrow b = 2e^{-1}$,

• $c = f(+\infty) \Rightarrow c = 0$.

($\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2t}{e^t} = 0$, d'après le cours)

2. Déterminons l'instant où la concentration d'alcool dans le sang est maximale:

D'après le tableau de variation, la concentration d'alcool dans le sang est maximale quand: $t = 1$.

En conclusion: • la concentration est maximale quand $t = 1$,

• elle est alors égale à $f(1) = \dfrac{2}{e}$ g/L,

• la concentration maximale, à 10^{-2} près, est alors égale à $f(1) \approx 0,74$ g/L.

3. Rappelons la limite de $\dfrac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$, et déduisons-en celle de $f(t)$ en $+\infty$:

D'après le cours: $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$, d'après le théorème des croissances comparées.

Dans ces conditions: $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{t}{e^t} = 0$.

Et donc: $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} 2te^{-t}$

$$= \lim_{t \to +\infty} 2\left(\frac{t}{e^t}\right)$$

$$= 2 \times 0$$

$$= 0.$$

Cela signifie que: quand t est très grand, cad au bout d'un certain temps, il n'y aura plus aucune trace d'alcool dans le sang.

4. a. Montrons qu'il existe 2 réels t_1 et t_2 avec $f(t_1) = f(t_2) = 0$:

Nous allons appliquer le théorème des valeurs intermédiaires pour répondre à cette question.

- Soit f une fonction continue sur $[a;b]$.

  Pour tout réel " K " compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel " c " de $[a;b]$ tel que: $f(c) = K$.

  Cela signifie que: l'équation $f(x) = K$ admet au moins une solution appartenant à $[a;b]$.

- Si de plus, la fonction f est strictement " croissante " ou " décroissante " sur $[a;b]$, l'équation $f(x) = K$ admet une unique solution appartenant à $[a;b]$.

Ici:
- f est continue sur $[0;1[$ et est strictement croissante sur $[0;1[$.
- f est continue sur $[1;+\infty[$ et est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

De plus:
- sur $[0;1[$, " $K = 0,2$ " est compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

  En effet: $0 \leqslant 0,2 \leqslant 2e^{-1}$.
- sur $]1;+\infty[$, " $K = 0,2$ " est compris entre $f(c)$ et $f(b)$.

  En effet: $0 \leqslant 0,2 \leqslant 2e^{-1}$.

Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, nous pouvons affirmer que l'équation $f(t) = 0,2$ **($K = 0,2$)** admet une solution unique appartenant à $[0;1[$ et une solution unique appartenant à $]1;+\infty[$.

Au total: il existe bien 2 nombres t_1 ($t_1 \in [0;1[$) et t_2 ($t_2 \in]1;+\infty[$) qui sont tels que:

$$f(t_1) = f(t_2) = 0,2.$$

4. b. Déterminons la durée minimale avant de pouvoir prendre le volant:

Pour répondre à cette question, nous avons le choix entre t_1 et t_2.

Nous retiendrons t_2 car entre t_1 et t_2, le taux d'alcoolémie est en phase croissante puis décroissante mais dépasse toujours "**0, 2**".

À l'aide d'une machine à calculer et par tâtonnement, on trouve:

$$t_2 \approx 3,578 \text{ heures.}$$

Au total, la durée minimale que Paul doit attendre avant de pouvoir prendre le volant est de: 3, 578 heures cad: 3 heures et 35 minutes.

5. a. Justifions qu'il existe un instant T:

Ici, il s'agit de déterminer "**T**" tel que: $f(T) = 5 \times 10^{-3}$.

Or: $5 \times 10^{-3} \in]1;+\infty[$*.

* car: c'est dans l'intervalle $]1;+\infty[$ que le taux d'alcoolémie diminue.

Or sur $]1;+\infty[$:
- f est continue
- f est strictement décroissante
- "$K = 5.10^{-3}$" est compris entre $f(c)$ et $f(b)$,

  car: $0 \leqslant 5.10^{-3} \leqslant 2e^{-1}$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, **oui**, il existe un instant " T " à partir duquel la concentration d'alcool dans le sang n'est plus détectable.

5. b. Recopions et complétons le tableau en exécutant l'algorithme:

Le tableau complété est le suivant:

	Initialisation	Étape 1	Étape 2
p	0, 25	0, 25	0, 25
t	3, 5	3, 75	4
C	0, 21	0, 18	0, 15

Notons que: la valeur affichée par l'algorithme correspond au temps nécessaire, en heure, pour que l'alcool ne soit plus détectable dans le sang.